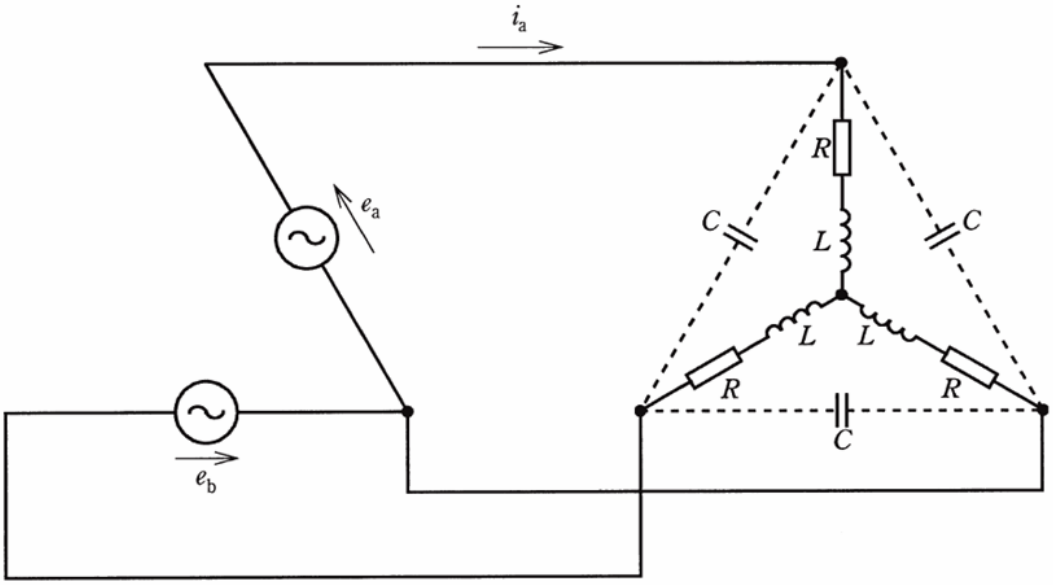
図のような V 結線電源と三相平衡負荷とからなる平衡三相回路において，R = 5 Ω，L = 16 mH である。

また，電源の線間電圧 e_a [V]は，時刻 t [s]において，$e_a = 100\sqrt{6}\sin(100\pi t)$ [V]と表され，線間電圧 e_b [V]は e_a [V]に対して振幅が等しく，位相が 120°遅れている。ただし，電源の内部インピーダンスは零である。このとき，次の(a)及び(b)の問に答えよ。



(a)　図の点線で示された配線を切断し，3 個のコンデンサを三相回路から切り離したとき，三相電力 P の値[kW]として，最も近いものを次の (1) ～ (5) のうちから一つ選べ。

(1)　1　　(2)　3　　(3)　6　　(4)　9　　(5)　18

(b)　点線部を接続することによって同じ特性の 3 個のコンデンサを接続したところ，i_a の波形は e_a の波形に対して位相が 30°遅れていた。

このときのコンデンサ C の静電容量の値[F]として，最も近いものを次の (1) ～ (5) のうちから一つ選べ。

(1) 3.6×10^{-5}　(2) 1.1×10^{-4}　(3) 3.2×10^{-4}　(4) 9.6×10^{-4}　(5) 2.3×10^{-3}

解説

(a)

解き方の手順

最終的に、三相電力を求める式 $P = 3I^2R$ にて答えを求めるので、この式に必要な数値、電流 I を 1～5 の手順で求めていきます

1, 一相分を抜きだして単相回路を作る（単相回路上で各値を求めていく）

2, 電圧を求める （一相分の電圧実効値を求める）

3, X_L を求める

4, R と X_L から Z を求める

5, E と Z から電流 I を求める

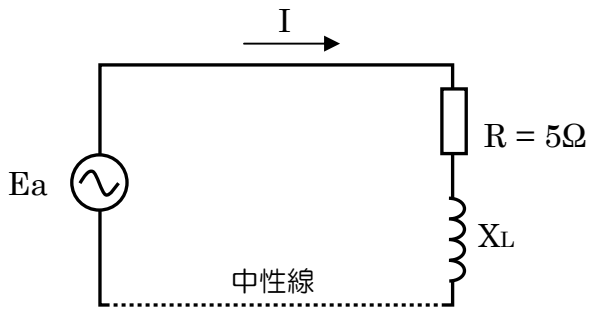
6, $P = 3I^2R$ を使って三相電力を求める

1, 一相分を抜きだして単相回路を作る

三相回路の問題を解くには、「Y 結線の一相分を抜きだして単相回路として解き、その後、求められた値を 3 倍する」という手順で答えを出すことが多くなります。

Δ結線(V 結線)回路には中性線がなく、一相分を抜きだして単相回路とすることができないので、電源側の V 結線を Y 結線に変換する必要があります。

三相回路の一相分を抜き出した回路は次のようになり、この回路における Ea、X_L、I を求めます。



2, 一相分に変換した電圧（実効値）を求める

$e_a = 100\sqrt{6}\sin(100\pi t)$ の中にある $100\sqrt{6}$ は最大値（波高値）なので、この値から実効値を求める。

実効値は、実効値 ＝ 最大値 ÷ $\sqrt{2}$ で求められる。

実効値 $= 100\sqrt{6} \div \sqrt{2} = 100\sqrt{3}$

$100\sqrt{3}$ は線間電圧なので、これを Y 結線の相電圧に直すには $\sqrt{3}$ で割る

$100\sqrt{3} \div \sqrt{3} = 100$ V

最大値 を 実効値に変換する →	線間電圧 を 相電圧 に変換する
$100\sqrt{6}$ → $100\sqrt{3}$	$100\sqrt{3}$ → 100

3, X_L を求める

$\boxed{e_a = 100\sqrt{6}\ \sin(100\pi t)}$ の $100\pi t$ は θ に相当する

$\boxed{e_a = 100\sqrt{6}\ \sin(100\pi t)}$ → $e_a = 100\sqrt{6}\ \sin\theta$

ここで、$\theta = 2\pi f t$ の関係にあるので、$\theta = 2\pi f t = 100\pi t$ となり、このことから $2\pi f = 100\pi$ ということがわかる。

$2\pi f = 100\pi$, $L = 16\ \mathrm{mH} = 16 \times 10^{-3}\ \mathrm{H}$ を $X_L = 2\pi f L$ に代入して X_L を求める。

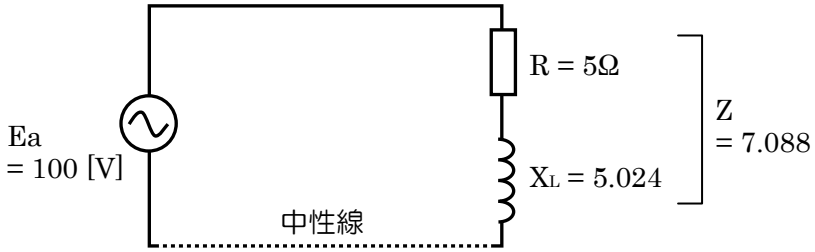
$X_L = 2\pi f L = 100\pi \times 16 \times 10^{-3} = 5.024$

$X_L = 5.024$

4, $R = 5$ と $X_L = 5.024$ から Z を求める

$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ に $R = 5$ と $X_L = 5.024$ を代入する。

$Z = \sqrt{5^2 + 5.024^2} \fallingdotseq 7.088$



5, 電流を求める

$I = \dfrac{E}{Z}$ に $E = 100$, $Z = 7.088$ を代入する

$I = \dfrac{E}{Z} = \dfrac{100}{7.088} \fallingdotseq 14.11$

6, 三相電力 P を求める

三相電力を求める式 $P = 3I^2R$ に $I = 14.11$, $R = 5$ を代入する

$P = 3I^2R = 3 \times 14.11^2 \times 5 \fallingdotseq 2986\ \mathrm{W} \fallingdotseq 3\ \mathrm{kW}$

答 (a) ― (2)

(b)

「i_a の波形は e_a の波形に対して位相が 30°　遅れていた」と問題中にあるが、
これは、「相電圧が線間電圧に対して 30°遅れる」ということに合わせている。

この問題では、線電流は線間電圧に対して 30°遅れる
もともと相電圧は線間電圧に対して 30°遅れる

つまり、ここでは電圧と電流は同相になることを意味していて、Xc と X_L の含まれている回路で電圧と電流が同相になるということは、「共振」状態を表している。

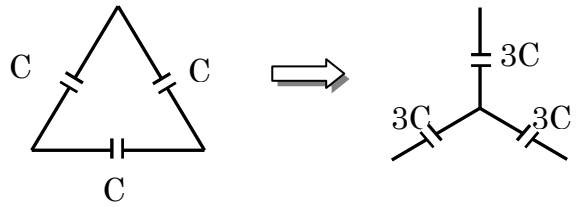
並列回路では、<u>$I_L = I_c$</u> となったとき共振状態になる。
この問題の回路では L と R が直列につながっているので、$I = I_{RL} + I_c$ の式をたてて、I_{RL} の I_L 成分と Ic がイコールになって相殺されれば共振状態と言える。

通常、並列の場合は $I = I_R + (I_L - I_c)$ の式をたてて、$I_L = I_c$、つまり $I_L - I_c = 0$ となれば「共振」になるが、今回は L と R が直列につながっているので、$I = I_{RL} + I_c$ という式をたてて $I_L - I_c = 0$ となればいい。
解き方としては、$I = I_{RL} + I_c$ の式をたてて、虚数部が 0 になったときの C を求める。

解き方の手順

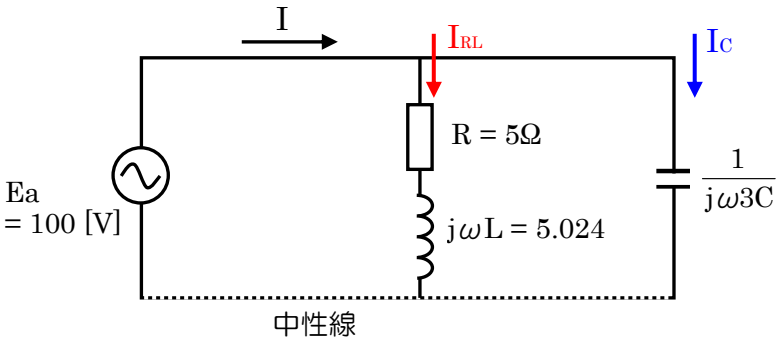
1, I_{RL} を求める
2, Ic を求める
3, $\dot{I} = \dot{I}_{RL} + \dot{I}_c$ に $\dot{I}_{RL}$ と $\dot{I}_c$ を代入する
4, 3 の式で虚数部が 0 になったときの C を求める。

コンデンサの接続されている回路はΔ結線なので、これを Y 結線に等価変換する必要があり、静電容量 C [F] の Δ → Y 変換は、次のように C を 3 倍する。



<u>静電容量C [F] の Δ → Y変換</u>

一相分の等価回路を次に示す



$X_c = \dfrac{1}{j\omega C}$ の関係にあるが、
静電容量 C [F] の Δ → Y 変換により C → 3C となったため、
ここでは $X_c = \dfrac{1}{j\omega 3C}$ になる

回路から $I = I_{RL} + I_c$ の式をたてて、この式の虚数部が 0 になればいい。

1, I_{RL}を求める

I_{RL} を、$I_{RL} = \dfrac{E}{Z}$ で表す。

R と X_L の直列回路では $\dot{Z} = R + j\omega L$ になるので $I_{RL} = \dfrac{E}{Z}$ に $\dot{Z} = R + j\omega L$ を代入すると $\dot{I}_{RL} = \dfrac{E}{R + j\omega L}$ になる。

2, I_cを求める

$I_c = \dfrac{E}{X_c}$ に $X_c = \dfrac{1}{j\omega 3C}$ を代入すると $I_c = \dfrac{E}{\dfrac{1}{j\omega 3C}} = j\omega 3CE$

$\dot{I}_c = j\omega 3CE$ になる。

3, $\dot{I} = \dot{I}_{RL} + \dot{I}_c$ に $\dot{I}_{RL}$ と $\dot{I}_c$ を代入する

$\dot{I} = \dot{I}_{RL} + \dot{I}_c$ に 、$\dot{I}_{RL} = \dfrac{E}{R + j\omega L}$ ， $\dot{I}_c = j\omega 3CE$ を代入して、これを整理する。

$$\dot{I} = \frac{E}{R + j\omega L} + j\omega 3CE$$

E で括る

$$= E\left(\frac{1}{R + j\omega L} + j\omega 3C\right)$$

分母の有理化（分子分母に $(R - j\omega L)$ をかける）

$$= E\left(\frac{1 \times (R - j\omega L)}{(R + j\omega L) \times (R - j\omega L)} + j\omega 3C\right)$$

$(R + j\omega L) \times (R - j\omega L) = R^2 - (j^2\omega^2 L^2)$

$$= E\left(\frac{R - j\omega L}{R^2 - (j^2\omega^2 L^2)} + j\omega 3C\right)$$

$j^2 = -1$ を代入

$$= E\left(\frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega 3C\right)$$

$$\frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - \frac{j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$= E\left(\frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - \frac{j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega 3C\right)$$

虚数部（j を含む項）を j で括る

$$= E\left\{\frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left(\omega 3C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right)\right\}$$

4,　3 の式で虚数部が 0 になるときの C を求める

虚数部が 0 になることが共振条件なので、$j\left(\omega 3C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right)$ が 0 になればいい。

したがって、$\omega 3C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = 0$ を解く。(＊1)

$\omega = 100\pi$ ，$\omega L = 5.024$, $R = 5$ を代入する。（$\omega = 2\pi f$）

$$100\pi \times 3C - \frac{5.024}{5^2 + 5.024^2} = 0$$

$$300\pi \times C = \frac{5.024}{5^2 + 5.024^2}$$

$$C = \frac{1}{300\pi} \times \frac{5.024}{5^2 + 5.024^2}$$

$$C \fallingdotseq \frac{1}{300\pi} \times \frac{1}{10}$$

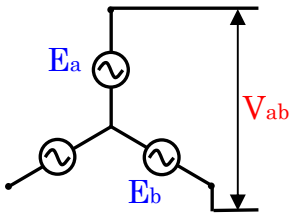
$$C \fallingdotseq 1.061 \times 10^{-4} \quad \fallingdotseq \quad 1.1 \times 10^{-4}$$

答　(b) － (2)

Y－Y 回路において **線間電圧** と **相電圧** の関係は次のようになります。

公式

$V_{ab} = \sqrt{3} E_a$　　線間電圧 $= \sqrt{3} \times$ 相電圧



Y－Y 回路において、

線間電圧 は 相電圧の $\sqrt{3}$ 倍 になる

正弦波交流を表す式（例）$e=100\sqrt{2}\sin\theta$ の θ は**角度**を表していますが、

この「角度 θ」は、角速度 ω で回転している物体が t 秒間回転したときの回転角度にも相当し、θ のことを 回転角 とも言います。

θ と角周波数(角速度)ωの関係を表す式は、次のようになります。

公式

角速度ω の物体が t 秒間回転したときの 回転角θを求める公式

$$\theta = \omega t$$

θ ： 回転角

ω ： 角周波数 (角速度)

t [秒] ： 時間

角周波数は $\boxed{\omega = 2\pi f}$ のため、次の式が成り立ちます。

公式

$$\theta = \omega t = 2\pi f t$$

f [Hz] ： 周波数

2π [rad] ： 360° (コイルの一回転をあらわす)

注 釈

(＊1)

「虚数部が 0 になることが共振条件」について考えてみます。

図 1 の R-L-C 並列回路において、電源の電圧を変えずに 周波数 f の値だけを変えていくと $I_L = I_C$ になる周波数があります。

この時の周波数を 共振周波数 と言い、$I_L = I_C$ となった状態のことを 並列共振 (共振状態) と言います。

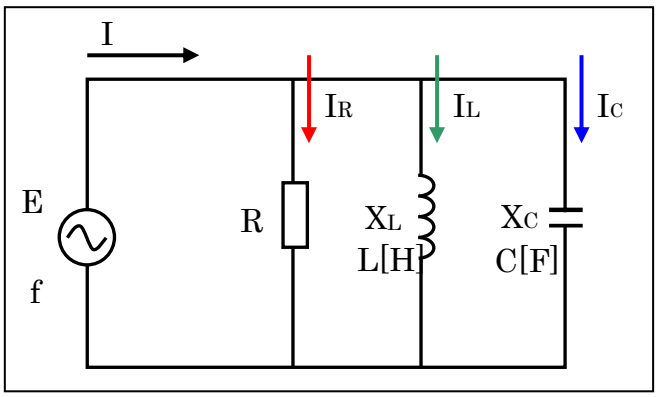


図 1

並列回路に流れる全電流 I は、$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2}$ で求められ、

ここで、$I_L = I_C$ となった状態のことを 並列共振 (共振状態) と言います。

図１の R-L-C 並列回路の共振について、$I=\sqrt{I_R{}^2+(I_L-I_C)^2}$ を使って考えてみます。

電流 Ic を求める式は $I_C=\dfrac{E}{X_C}$ で、これに $X_C=\dfrac{1}{j\omega C}$ を代入すると $\boxed{I_C=j\omega CE}$ になる。

電流 I_L を求める式は $I_L=\dfrac{E}{X_L}$ で、これに $X_L=j\omega L$ を代入すると $\boxed{I_L=\dfrac{E}{j\omega L}}$ になり、

$I_L=\dfrac{E}{j\omega L}$ の分母分子に j をかけると $\boxed{I_L=-\dfrac{jE}{\omega L}}$ になる。（$j^2=-1$）

$I=\sqrt{I_R{}^2+(I_L-I_C)^2}$ に $\boxed{I_L=-\dfrac{jE}{\omega L}}$ と $\boxed{I_C=j\omega CE}$ を代入する。

$$I=\sqrt{I_R{}^2+\left(-\frac{jE}{\omega L}-j\omega CE\right)^2}$$

虚数部を −j で括る

$$I=\sqrt{I_R{}^2-j\left(\frac{E}{\omega L}+\omega CE\right)^2}$$

この式で、虚数部が 0 になれば <u>$I_L=I_C$</u> になり、<u>並列共振</u>になるということです。

この場合は、$I=\sqrt{I_R{}^2-j\left(\dfrac{E}{\omega L}+\omega CE\right)^2}$ の $\left(\dfrac{E}{\omega L}+\omega CE\right)$ が 0 になれば、虚数部が 0 になります。

$\dfrac{E}{\omega L}+\omega CE=0$ のとき共振状態になる。